

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат 03C1BBABF83E153235592ADEEC463FDD
Владелец МАШАРОВ ПАВЕЛ АНАТОЛЬЕВИЧ
Действителен с 06.07.2026 по 29.09.2027
Должность проректор

УТВЕРЖДАЮ
проректор

_____ П.А. Машаров
«16» апреля 2026 г.
МП

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
«ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА»

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа бакалавриата
Направление подготовки / Специальность	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2026

Рабочая программа дисциплины **«Избранные вопросы анализа»** для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2026 года.

Разработчик:

профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений
доктор физ.-мат. наук, профессор

В.В. Волчков

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений
Протокол от 14.04.2026 № 8

Заведующий кафедрой

В.В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Врио декана факультета математики и
информационных технологий
16.04.2026

Н.Е. Машенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.
Протокол от 15.04.2026 № 3
Председатель

Ю.В. Абраменкова

Руководитель основной образовательной
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.
14.04.2026

В.В. Волчков

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объёме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ, Комплексный анализ, Функциональный анализ, Теория меры и интеграла.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Научные основы элементарной математики, Научный семинар по вопросам математического анализа, Гармонический анализ, Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная), Производственная практика: преддипломная практика (обязательная).

2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.03.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.Б.37 Избранные вопросы анализа
Часть образовательной программы	Базовая часть
Количество зачетных единиц / всего часов	6 / 216

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	3	6	22		30	56	108	
Очная	4	7	21		30	57	108	экзамен

3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Формирование математической культуры студента, овладение новым математическим аппаратом, углубление знаний в области алгебры, геометрии и

математического анализа, развитие навыков логического мышления и подготовка к профессиональной деятельности, подготовка к чтению специальной литературы.

4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

4.1. Компетенции

ОПК-3. Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики

4.2. Индикаторы компетенций

ОПК-3.1. Применяет классические и современные математические методы для решения задач, связанных с геометрическими объектами, демонстрирует широкий математический кругозор

Результаты обучения

ОПК-3.1.1 Знает определения и утверждения, методы решения задач, приёмы доказательства утверждений, , применяемые для решения задач дисциплины.

ОПК-3.1.2 Умеет выбирать и использовать необходимые математические методы и вычислительные средства при решении задач дисциплины .

ОПК-3.1.3 Аргументированно выбирает метод решения задачи, устанавливает свойства геометрических объектов, связь между ними, доводит решение задачи до приемлемого (числового или символьного) результата, оценивает и анализирует полученный результат

Компетенции	Индикаторы	Результаты обучения
ОПК-3. Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	ОПК-3.1. Применяет классические и современные математические методы для решения задач, связанных с геометрическими объектами, демонстрирует широкий математический кругозор	ОПК-3.1.1 Знает определения и утверждения, методы решения задач, приёмы доказательства утверждений, , применяемые для решения задач дисциплины. ОПК-3.1.2 Умеет выбирать и использовать необходимые математические методы и вычислительные средства при решении задач дисциплины . ОПК-3.1.3 Аргументированно выбирает метод решения задачи, устанавливает свойства геометрических объектов, связь между ними, доводит решение задачи до приемлемого (числового или символьного) результата, оценивает и анализирует полученный результат

5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
---------------	--

1. Уравнения свёртки	1.1. Функции с нулевыми интегралами по отрезкам. 1.2. Теорема Произволова. 1.3. Теорема Малюгина. 1.4. Теорема о квадрате для локально суммируемых функций (метод сглаживания). 1.5. Приложения теоремы о квадрате (усиление теоремы Мореры, теорема Зальцмана). 1.6. Теорема Дзядыка, усиление теоремы Дзядыка 1.7. Отображения, сохраняющие меру. 1.8. Аппроксимация индикаторами. 1.9. Задача трёх квадратов, теорема Беренштейна-Тэйлора-Лаирда. 1.10. Обобщение теоремы о трёх квадратах. 1.11. Локальная теорема о квадрате. 1.12. Преобразование Радона, теорема Крамера-Вольда. 1.13. Задача о минимальном круге.
2. Цилиндрические функции	2.1. Разложение в ряд. 2.2. Линейная зависимость и независимость. 2.3. Формулы дифференцирования. 2.4. Рекуррентное соотношение. 2.5. Дифференциальное уравнение. 2.6. Интеграл Бесселя. 2.7. Преобразование Фурье радиальных функций и их обобщений. 2.8. Асимптотика на бесконечности. 2.9. Функции Бесселя как сферические функции. 2.10. Разложение обобщенных сферических функций по плоским волнам. 2.11. Наличие нулей. 2.12. Соотношения ортогональности. 2.13. Вещественность нулей. 2.14. Простота нулей, асимптотика нулей. 2.15. Полнота функций Бесселя.
3. Приложения к проблемам анализа	3.1. Метод сглаживания 3.2. Теоремы типа Лиувилля. 3.3. Уравнение Абеля. 3.4. Уравнения Вольтерра второго рода. 3.5. Простейшие свойства класса функций с нулевыми интегралами по кругам фиксированного радиуса. 3.6. Третья задача Произволова.
4. Приложения к проблемам интегральной геометрии	4.1. Теорема единственности Джона-Смита и ее обобщения. 4.2. Точность условий в теореме единственности. 4.3. Решение третьей задачи Произволова. 4.4. Теорема Зальцмана о двух радиусах.

	4.5. Локальная теорема о двух радиусах. 4.6. Теоремы типа Лиувилля для класса функций с нулевыми интегралами по кругам.
--	--

6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Форма обучения – очная, курс – 3, семестр – 6

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. Уравнения свёртки	11		15	28	
1.1. Теорема Произволова.	2		4	6	
1.2. Теорема Дзядыка, усиление теоремы Дзядыка	2		4	6	
1.3. Задача трёх квадратов, теорема Беренштейна-Тэйлора-Лаирда.	4		8	6	
1.4. Задача о минимальном круге.	2		4	6	
Раздел 2. Цилиндрические функции	11		15	28	
2.1. Преобразование Фурье радиальных функций и их обобщений.	2		4	6	
2.2. Соотношения ортогональности.	2		4	6	
2.3. Вещественность нулей.	4		8	6	
2.4. Полнота функций Бесселя.	2		4	6	
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР / ЗА КУРС / ПО КОМПОНЕНТУ ОП	22	–	30	56	108

6.2. Форма обучения – очная, курс – 4, семестр – 7

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 3. Приложения к проблемам анализа	11		15	28	
1.1. Метод сглаживания	2		4	6	
1.2. Теоремы типа Лиувилля.	2		4	6	

1.3. Уравнение Абеля.	4		8	6	
1.4. Уравнения Вольтерра второго рода.	2		4	6	
Раздел 4. Приложения к проблемам интегральной геометрии	10		15	29	
2.1. Теорема единственности Джона-Смита и ее обобщения.	2		4	6	
2.2. Теорема Зальцмана о двух радиусах.	2		4	6	
2.3. Локальная теорема о двух радиусах.	4		8	6	
2.4. Теоремы типа Лиувилля для класса функций с нулевыми интегралами по кругам.	2		4	6	
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР / ЗА КУРС / ПО КОМПОНЕНТУ ОП	21	—	30	57	108

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Контрольные вопросы

Раздел 1

- 1.1. Функции с нулевыми интегралами по отрезкам.
- 1.2. Теорема Произволова.
- 1.3. Теорема Малюгина.
- 1.4. Теорема о квадрате для локально суммируемых функций (метод сглаживания).
- 1.5. Приложения теоремы о квадрате (усиление теоремы Мореры, теорема Зальцмана).
- 1.6. Теорема Дзядыка, усиление теоремы Дзядыка
- 1.7. Отображения, сохраняющие меру.
- 1.8. Аппроксимация индикаторами.
- 1.9. Задача трёх квадратов, теорема Беренштейна-Тэйлора-Лаирда.
- 1.10. Обобщение теоремы о трёх квадратах.
- 1.11. Локальная теорема о квадрате.
- 1.12. Преобразование Радона, теорема Крамера-Вольда.
- 1.13. Задача о минимальном круге.

Раздел 2

- 2.1. Разложение в ряд функций Бесселя.
- 2.2. Линейная зависимость и независимость.
- 2.3. Формулы дифференцирования.
- 2.4. Рекуррентное соотношение.
- 2.5. Дифференциальное уравнение.
- 2.6. Интеграл Бесселя.
- 2.7. Преобразование Фурье радиальных функций и их обобщений.
- 2.8. Асимптотика на бесконечности.
- 2.9. Функции Бесселя как сферические функции.
- 2.10. Разложение обобщенных сферических функций по плоским волнам.
- 2.11. Наличие нулей.

- 2.12. Соотношения ортогональности.
- 2.13. Вещественность нулей.
- 2.14. Простота нулей, асимптотика нулей.
- 2.15. Полнота функций Бесселя.

Раздел 3

- 3.1. Метод сглаживания
- 3.2. Теоремы типа Лиувилля.
- 3.3. Уравнение Абеля.
- 3.4. Уравнения Вольтерра второго рода.
- 3.5. Простейшие свойства класса функций с нулевыми интегралами по кругам фиксированного радиуса.
- 3.6. Третья задача Произволова.

Раздел 4

- 4.1. Теорема единственности Джона-Смита и ее обобщения.
- 4.2. Точность условий в теореме единственности.
- 4.3. Решение третьей задачи Произволова.
- 4.4. Теорема Зальцмана о двух радиусах.
- 4.5. Локальная теорема о двух радиусах.
- 4.6. Теоремы типа Лиувилля

7.2. Темы докладов (рефератов)

- 1. Функции с нулевыми интегралами по сдвигам одного квадрата (теорема Помпейю).
- 2. Теорема Произволова.
- 3. Теорема Малюгина.
- 4. Теорема о квадрате для локально суммируемых функций (метод сглаживания).
- 5. Приложения теоремы о квадрате (усиление теоремы Мореры, теорема Зальцмана).
- 6. Теорема Дзядыка, усиление теоремы Дзядыка
- 7. Отображения, сохраняющие меру.
- 8. Аппроксимация индикаторами.

7.3. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике по темам:

- 1. Уравнение Абеля.
- 2. Уравнения Вольтерра второго рода.
- 3. Простейшие свойства класса функций с нулевыми интегралами по кругам фиксированного радиуса.
- 4. Третья задача Произволова.
- 5. Теорема единственности Джона-Смита и ее обобщения.
- 6. Точность условий в теореме единственности.
- 7. Решение третьей задачи Произволова.
- 8. Теорема Зальцмана о двух радиусах.
- 9. Локальная теорема о двух радиусах.

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

7.4. Образец содержания экзаменационного билета

- 1. Полнота функций Бесселя.
- 2. Теорема о среднем для решений уравнения Гельмгольца.
- 3. Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по кругам.
- 4. При каком a функция $f(x,y)=\sin ax$ будет иметь нулевые интегралы по всем кругам единичного радиуса?

5. Найдите преобразование Фурье индикатора единичного круга с центром в нуле.

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по столбальной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

8.1. Семестр 8

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-3	Организационно-учебная работа в аудитории	20
	Самостоятельная работа	20
	Контрольные работы по практике	30
	Контрольная работа по теоретическому материалу	30
ИТОГО		
Промежуточная аттестация		
Общий итог за семестр		100

Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	
75-79	C		

70-74	D	удовлетворительно	
60-69	E		
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Волчков, Вит.В. Волчков, Н.П. Волčkова. О некоторых свойствах функций, характеризующих нулевыми интегралами // Математическое образование. - 2021. - № 4 (100), часть II. - С. 38–48.

2. В.В. Волчков, Вит.В. Волчков, Н.П. Волčkова. О некоторых свойствах функций, характеризующих нулевыми интегралами. Окончание // Математическое образование. - 2022. - № 1 (101). - С. 38–47.

3. В.В. Волчков. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Математический сборник. - 1995. - Т. 186, № 6. - С. 15–34.

10.1. Дополнительная литература

4. Хелгасон, С. Преобразование Радона / С. Хелгасон. - М. : Мир, 1983. - 150 с.

5. Йон, Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. - М.: ИЛ, 1958. - 158 с.

6. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. - Москва: Мир, 1987 - 736 с.

11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU:** сайт / НЭБ (ООО). – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
2. **Научная электронная библиотека «КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
3. **Национальная подписка:** сайт / РЦНИ. – Москва, 2020- . – URL: <https://podpiska.rcsi.science/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: для авторизов.пользователей ДонГУ. – Текст: электронный.
4. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
5. **Образовательная платформа Юрайт:** сайт. – Москва, 2013- . – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронная библиотека РГБ:** раздел сайта / РГБ. – Текст: электронный // Российская государственная библиотека: официальный сайт. – <https://ldiss.rsl.ru/electroniclibrary>. – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – Виртуальный читальный зал РГБ на территории НБ ДонГУ.
7. **Электронно-библиотечная система Лань:** сайт / ЭБС Лань. – С.-Петербург, 2011- . – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
8. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
9. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.
10. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: свободный.

12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. РЕД ОС, Astra Linux (OEM).
2. OpenOffice, LibreOffice.